数理解析研究所講究録
336巻 1978年 87-100

Sheaves of $\mathcal{B}$-valued structures

早大 理工　　高橋 真

D. P. Ellermanは[1]においてSheaves of structuresに関してSheaf forcingを定義してUltrastalk Theoremを証明し、Ultrastalkが Ultraproduct や Boolean ultrapowerの拡張であることを示している。ここでは Sheaves of structuresの拡張としてのSheaves of $\mathcal{B}$-structuresについて考察する。

Def　I: top. sp.　$\mathcal{B}$: c. B. a. に対し category $\mathcal{O}(I)^{op}$, $M_\mu^{(\mathcal{B})}$ を次の様に定義する.

$\mathcal{O}(I)^{op}$:　objects　open sets of I

morphisms　$v \subset u$ のとき $u \longrightarrow v$ なる morphism が1つ

$M_\mu^{(\mathcal{B})}$:　objects　$\mathcal{B}$-valued structures of type μ

morphisms　$\mathcal{B}$-morphisms

[$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$: $\mathcal{B}$-structures に対し $h : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ が $\mathcal{B}$-morphism とは任意の atomic relation $R(x_1, \cdots, x_n)$ と任意の $a_1, \cdots, a_n \in \mathfrak{A}$ に対し

$$\left[\begin{array}{l}[\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!] \leq [\![R(h(a_1),\cdots,h(a_n))]\!] \\ \text{をみたすこととする}\end{array}\right]$$

Def　presheaf of $\mathcal{B}$-st. とは $P : \mathcal{O}(I)^{op} \longrightarrow M_\mu^{(\mathcal{B})}$ なる functor である。

これを (I, P) と書く。

$U \downarrow U'$ に対し $P(U) \downarrow P(U')$ なる morphism を $p^U_{U'}$ と書き restriction map と呼ぶ

Def　(I, P) : presheaf of $\mathcal{B}$-st. とする。

$i \in I$ における P の stalk P_i $(= \varinjlim_{U \ni i} P(U))$ の atomic relation

$R(x_1,\cdots,x_n)$ の値を次の様に定義する。$b_1,\cdots,b_n \in P_i$ とする。

$$[\![R(b_1,\cdots,b_n)]\!]_{P_i} \leqq \bigvee_{U \ni i} \bigvee_{\substack{a_1,\cdots,a_n \in P(U) \\ \text{s.t. } a_k \in b_k \ (1 \leq k \leq n)}} [\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!]$$

以下 a の i における germ を $[a]_i$，或いは混乱のおそれのないときは単に $[a]$ とかくことにする。

prop1　$a_1,\cdots,a_n \in P(U_0)$ とする。

$$[\![R([a_1]\cdots[a_n])]\!]_{P_i} = \bigvee_{U_0 \supset U \ni i} [\![R(p^{U_0}_U(a_1),\cdots,p^{U_0}_U(a_n))]\!]$$

∵)　$\geqq$ は $[p^{U_0}_U(a_k)] = [a_k]$ より明らかだが

$\leqq$ は ${}^\forall c_1,\cdots,c_n \in P(U)$ s.t. $[c_k]=[a_k]$ に対し $U_1,\cdots,U_n \in \mathcal{O}(I)$ s.t. $U_1,\cdots,U_n \subset U \cap U_0$

があって $p^{U_0}_{U_k}(a_k) = p^U_{U_k}(c_k)$　$(1 \leqq k \leqq n)$

よって $U_1 \cap \cdots \cap U_n = U'$ とおくと

$$[\![R(c_1,\cdots,c_n)]\!] \leqq [\![R(p^U_{U'}(c_1),\cdots,p^U_{U'}(c_n))]\!] = [\![R(p^{U_0}_{U'}(a_1),\cdots,p^{U_0}_{U'}(a_n))]\!]$$

$$\therefore \bigvee_{\substack{c_1,\cdots,c_n \in P(U) \\ [c_k]=[a_k]}} [\![R(c_1,\cdots,c_n)]\!] \leqq \bigvee_{U_0 \cap U \supset U' \ni i} [\![R(p^{U_0}_{U'}(a_1),\cdots,p^{U_0}_{U'}(a_1))]\!]$$

$$\leq \bigvee_{u_0 \supset u' \ni i} \llbracket R(P^{u_0}_{u'}(a_1), \cdots, P^{u_0}_{u'}(a_n)) \rrbracket$$

$$\therefore \bigvee_{u \ni i} \bigvee_{\substack{c_1,\cdots,c_n \in P(u) \\ [c_k]=[a_k]}} \llbracket R(c_1,\cdots,c_n) \rrbracket \leq \bigvee_{u_0 \supset u \ni i} \llbracket R(P^{u_0}_{u}(a_1), \cdots, P^{u_0}_{u}(a_n)) \rrbracket$$

Def　(I, P) : presheaf of $\mathcal{B}$-st. が次の (1), (2) をみたすとき

(I, P) を sheaf of $\mathcal{B}$-st. と呼ぶ

(1) $\forall u \in \mathcal{O}(I)^{op}$, $\forall \{u_r\}_{r \in A}$ s.t. open covering of u に対し

$\forall \{a_r\}$ s.t. $a_r \in P(u_r)$, $\forall r, s \in A$ $P^{u_r}_{u_r \cap u_s}(a_r) = P^{u_s}_{u_r \cap u_s}(a_s)$

$\Rightarrow \exists!\, a \in P(u)$ $\forall r \in A$ $P^{u}_{u_r}(a) = a_r$

(2) $\forall u \in \mathcal{O}(I)^{op}$, $\forall \{u_r\}$ s.t. open covering of u, $\forall R(x_1, \cdots, x_n)$: atomic relation

$\forall a_1, \cdots, a_n \in P(u)$

$$\llbracket R(a_1, \cdots, a_n) \rrbracket = \bigwedge_r \llbracket R(P^u_{u_r}(a_1), \cdots, P^u_{u_r}(a_n)) \rrbracket$$

Remark　functor $P : \mathcal{O}(I)^{op} \longrightarrow Sets$ が (1) をみたすとき

sheaf of sets と呼ぶ

Def　(I, P) : presheaf of $\mathcal{B}$-st. のとき presheaf of sets $(I, {}^nP)$ を

次の様に定義する。

$${}^nP(u) \stackrel{\triangle}{=} P(u)^n$$

$${}^nP^u_{u'}(\langle a_1, \cdots, a_n \rangle) \stackrel{\triangle}{=} \langle P^u_{u'}(a_1), \cdots, P^u_{u'}(a_n) \rangle$$

また 任意の atomic relation $R(x_1, \cdots, x_n)$ と $b \in \mathcal{B}$ に対し

$R^b(u) \stackrel{\triangle}{=} \{\langle a_1, \cdots, a_n \rangle \in {}^nP(u) \mid \llbracket R(a_1, \cdots, a_n) \rrbracket \geq b\}$

$R^{b\,u}_{u'} \stackrel{\triangle}{=} {}^nP^u_{u'} \upharpoonright R^b(u)$　　とおくと

(I, R^b) は $(I, {}^nP)$ の subpresheaf (graph subpresheaf と呼ぶ)

lemma (I, P): sheaf of sets, (I, R): subpresheaf of (I, P) とする

(I, R) が sheaf になる

$\leftrightarrow \forall U \in \mathcal{O}(I)^{op}\ \forall a \in P(U)\ [\forall i \in U\ \exists U_i\ [i \in U_i \subset U \wedge P^U_{U_i}(a) \in R(U_i)] \rightarrow a \in R(U)]$

∵) $(\rightarrow)$ $\{U_i\}_{i \in U}$ は U の open covering

$\{P^U_{U_i}(a)\}_{i \in U}$ を考える

$\forall i, j \in U \quad P^{U_i}_{U_i \cap U_j}(P^U_{U_i}(a)) = P^U_{U_i \cap U_j}(a) = P^{U_j}_{U_i \cap U_j}(P^U_{U_j}(a))$

従って (I, R): sheaf より

$\exists! b \in R(U) \quad \forall i \in U \quad P^U_{U_i}(b) = P^U_{U_i}(a)$

(I, P): sheaf より $a = b$ $\quad \therefore a \in R(U)$

$(\leftarrow)$ $\forall U \in \mathcal{O}(I)^{op}$, $\forall \{U_r\}$: open covering of U, $\forall \{a_r\}$ s.t. $a_r \in R(U_r)$ に対し

$\forall U_r, U_s \quad R^{U_r}_{U_r \cap U_s}(a_r) = R^{U_s}_{U_r \cap U_s}(a_s)$

$\rightarrow \forall U_r, U_s \quad P^{U_r}_{U_r \cap U_s}(a_r) = P^{U_s}_{U_r \cap U_s}(a_s)$

$\rightarrow \exists! a \in P(U) \quad \forall U_r\ [P^U_{U_r}(a) = a_r]$ $\quad$ (∵ (I, P): sheaf)

$\rightarrow \exists! a \in P(U)\ [\forall i \in U\ \exists U_i\ [i \in U_i \subset U \wedge P^U_{U_i}(a) \in R(U_i)] \wedge \forall U_r\ [P^U_{U_r}(a) = a_r]]$

$\rightarrow \exists! a \in P(U)\ [a \in R(U) \wedge \forall U_r\ [P^U_{U_r}(a) = a_r]]$

$\rightarrow \exists! a \in R(U)\ \forall U_r\ [R^U_{U_r}(a) = a_r]$

Th.1 (I, P): presheaf of $\mathcal{B}$-set. とするとき, 次の (i), (ii) は同値

(i) (I, P): sheaf of $\mathcal{B}$-set.

(ii) (I, P): sheaf of sets であって, 任意の atomic relation と任意の $f \in \mathcal{B}$ についての graph subpresheaf が sheaf になること

∵) lemma より

$$\forall U \in \mathcal{O}(I)^{op}\ \forall a_1,\cdots,a_n \in P(U)\left[\forall i \in U\ \exists U_i\ [i \in U_i \subset U \wedge [\![R(P^U_{U_i}(a_1),\cdots,P^U_{U_i}(a_n))]\!] \geq b] \to [\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!] \geq b\ \right] \cdots (*)$$

と sheaf of $\mathcal{B}$-st. の def の (2) との同値性を言えばよい

(2) → (*)　(*) の前半より $\{U_i\}$ は U の open covering で

$$\forall U_i\quad [\![R(P^U_{U_i}(a_1),\cdots,P^U_{U_i}(a_n))]\!] \geq b$$

$$\therefore\ \bigwedge_i [\![R(P^U_{U_i}(a_1),\cdots,P^U_{U_i}(a_n))]\!] \geq b$$

$$\therefore\ [\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!] \geq b \qquad (\because (2))$$

(*) → (2)　(2) において $\bigwedge_r [\![R(P^U_{U_r}(a_1),\cdots,P^U_{U_r}(a_n))]\!] = b$ とおく

従って $\forall U_r\ [\![R(P^U_{U_r}(a_1),\cdots,P^U_{U_r}(a_n))]\!] \geq b$

$$\therefore\ \forall i \in U\ \exists U_r\ [i \in U_r \subset U \wedge [\![R(P^U_{U_r}(a_1),\cdots,P^U_{U_r}(a_n))]\!] \geq b]$$

(∵ $\{U_r\}$ は U の open covering)

$$\therefore\ [\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!] \geq b \qquad (\because (*))$$

ところで $\forall U_r\ [\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!] \leq [\![R(P^U_{U_r}(a_1),\cdots,P^U_{U_r}(a_n))]\!]$

$$\therefore\ [\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!] \leq \bigwedge_r [\![R(P^U_{U_r}(a_1),\cdots,P^U_{U_r}(a_n))]\!] = b$$

$$\therefore\ [\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!] = b$$

Remark Th1 より, sheaf of $\mathcal{B}$-st. とは, 任意の atomic relation と任意の $b \in \mathcal{B}$ に対し $\forall U \in \mathcal{O}(I)^{op}[\forall b, b' \in \mathcal{B}\ [b \leq b' \to R^{b'}(U) \subset R^{b}(U)] \wedge R^{0}(U) = {}^{n}P(U)]$ が成り立つような $(I, {}^{n}P)$ の subsheaf (I, R^{b}) が決まっている sheaf of sets のことである.

Def　sheaf of sets (I, Ω) を次の様に定義する

$\Omega(u) \triangleq \{v \mid v \subset u \wedge v \in \mathcal{O}(I)^{\neg\neg}\}$

$\Omega^{u}_{u'}(v) \triangleq v \cap u'$

Remark　(I, Ω) は I 上の sheaf of sets 全体の作るトポスの subobject classifier になっている.

Prop 2　(I, P) : sheaf of sets とする

(I, P) の subsheaf と natural transformation $P \to \Omega$ が 1-1 対応する

∵) i) (I, R) : subsheaf of (I, P) に対し $\mathcal{R} : P \to \Omega$ を

$\mathcal{R}_u(a) \triangleq \bigcup \{u' \subset u \mid P^{u}_{u'}(a) \in R(u')\}$

ii) $\mathcal{R} : P \to \Omega$ に対し (I, R) : subsheaf of (I, P) を

$R(u) \triangleq \{a \in P(u) \mid \mathcal{R}_u(a) = u\}$

と対応させればより, 1-1 対応になっていることは明らか

Def　$\mathcal{F}$: ultrafilter of $\mathcal{B}$ とする

$R^{\mathcal{F}}(u) \triangleq \bigcup_{b \in \mathcal{F}} R^{b}(u)$ により定義された sheaf of set $(I, R^{\mathcal{F}})$ が $(I, {}^{n}P)$ の subsheaf になるとき $\mathcal{F}$ を P-ultrafilter と呼ぶ

prop 2 より $(I, R^{\mathcal{F}})$ に対応する nat. trans. が存在するが, それを $\models R^{\mathcal{F}} : P \to \Omega$ と書く

i.e. $\models R^{\mathcal{F}}{}_u(a_1, \cdots, a_n) = \bigcup \{u' \subset u \mid [\![R(P^{u}_{u'}(a_1), \cdots, P^{u}_{u'}(a_n))]\!] \in \mathcal{F}\}$

Def　(I, P) : sheaf of $\mathcal{B}$-st. が locally invariant とは

$\forall R$: atomic relation $\forall u \in \mathcal{O}(I)^{op}$ $\forall i \in u$ $\exists v \ni i$ $\forall a_1, \cdots, a_n \in P(u)$

$$[\![R([a_1], \cdots, [a_n])]\!]_{P_i} = [\![R(P^u_v(a_1), \cdots, P^u_v(a_n))]\!]_{P(v)}$$

をみたすときをいう

Prop 3　(I, P) : locally invariant のとき

$\models R^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n) = \{ i \in u \mid [\![R([a_1], \cdots, [a_n])]\!]_{P_i} \in \mathcal{F} \}$

∵) 明らか

Def　(I, P) : sheaf of $\mathcal{B}$-st.　$\mathcal{F}$: P-ultrafilter

$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$: n-ary formula とする

natural transformation $\Vdash \varphi^{\mathcal{F}} : {}^nP \longrightarrow \Omega$ を次の様に定義する

1) φ : atomic　$\Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n) \leftrightharpoons \models \varphi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n)$

2) $\varphi : \psi \vee \chi$　$\Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n) \leftrightharpoons \Vdash \psi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n) \cup \Vdash \chi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n)$

3) $\varphi : \psi \wedge \chi$　$\Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n) \leftrightharpoons \Vdash \psi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n) \cap \Vdash \chi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n)$

4) $\varphi : \neg \psi$　$\Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n) \leftrightharpoons \mathrm{int}\,(u - \Vdash \psi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n))$

5) $\varphi : \exists x \psi$　$\Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n) \leftrightharpoons \bigcup_{v \subset u} \bigcup_{a \in P(v)} \Vdash \psi^{\mathcal{F}}_v(a, P^u_v(a_1), \cdots, P^u_v(a_n))$

Def　(I, P) : sheaf of $\mathcal{B}$-st.　$\mathcal{F}$: P-ultrafilter

$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$: n-ary formula とする

$P_i \Vdash^{\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n]) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} i \in \Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n)$

$\Vdash^* \varphi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} --(\Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n)) \cap u$　(但し $-v = \mathrm{int}\,(I - v)$)

$P_i \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n]) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} i \in \Vdash^* \varphi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n)$

Def　$Pr(I) \triangleq \{F \mid F: \text{prime filter of } O(I)\}$

$Pr(I)$ に $X^\circ(u) = \{F \in Pr(I) \mid F \ni u\}$　$(u \in O(I))$ を base にして

位相を入れる.

prop 4　$\eta: I \longrightarrow Pr(I)$　は continuous

$$\begin{array}{ccc} \eta: I & \longrightarrow & Pr(I) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ i & \longmapsto & F_i = \{u \in O(I) \mid u \ni i\} \end{array}$$

∵)　$\eta^{-1}(X^\circ(u)) = u$

Def　sheaf of B-set $(Pr(I), P^\circ)$ を次の様に定義する.

但し (I, P) は sheaf of B-set.

for X: open in $Pr(I)$　$P^\circ(X) \triangleq P(\eta^{-1}(X))$

for X, X': open in $Pr(I)$ s.t. $X' \subset X$　$P^{\circ X}_{X'} \triangleq P^{\eta^{-1}(X)}_{\eta^{-1}(X')}$

Th 2.　$(Pr(I), P^\circ)$: locally invariant, $\mathcal{F}$: P-ultrafilter

$a_1, \cdots, a_n \in P(u) = P^\circ(X^\circ(u))$, $F \in X(u)$　とする

$P^\circ_F \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])$ iff $\{i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])\} \in F$

∵) Th を証明する代りに Th と同値な次の等式を証明する.

$\{F \in X^\circ(u) \mid P^\circ_F \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])\} = X^\circ(\{i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])\})$

i) φ: atomic のとき

$(Pr(I), P^\circ)$: locally invariant ならば (I, P): locally invariant である

から Prop 3 より

$\{i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])\} = --(\Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n)) \cap u$

$= --(\{i \in u \mid [\![\varphi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathcal{F}_i\}) \cap u$

同様に $Pr(I)$ で

$$\{F\in X^\circ(u) \mid P^\circ_F \Vdash^{*\mathfrak{F}} \varphi([a_1],\cdots,[a_n])\}$$

$$= --(\{F\in X^\circ(u) \mid [\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]\in\mathfrak{F}\})\cap X^\circ(u)$$

$$= --(\{F\in X^\circ(u) \mid \exists x\ni F\ [\![\varphi(P^{cX(u)}_{x}(a_1),\cdots,P^{cX(u)}_{x}(a_n))]\!]\in\mathfrak{F}\})\cap X^\circ(u)$$

$$= --(\{F\in X^\circ(u) \mid \exists x\ni F\ [\![\varphi(P^{u}_{\pi(x)}(a_1),\cdots,P^{u}_{\pi(x)}(a_n))]\!]\in\mathfrak{F}\})\cap X^\circ(u)$$

$$= --(\{F\in X^\circ(u) \mid \exists x\ni F \bigwedge_{i\in\pi(x)} [\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]_{P_i}\in\mathfrak{F}\})\cap X^\circ(u)$$

$$= --(\{F\in X^\circ(u) \mid \exists u\in F \bigwedge_{i\in u} [\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]_{P_i}\in\mathfrak{F}\})\cap X^\circ(u)$$

$$= --(\{F\in X^\circ(u) \mid \exists u\in F\ \forall i\in u\ [\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]_{P_i}\in\mathfrak{F}\})\cap X^\circ(u)$$

$(\because\ \mathfrak{F}:$ P-ultrafilter $)$

$$= --(\{F\in X^\circ(u) \mid \exists u\in F\quad u=\{i\in u \mid [\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]\in\mathfrak{F}\}\})\cap X^\circ(u)$$

$$= --X^\circ(\{i\in u \mid [\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]\in\mathfrak{F}\})\cap X^\circ(u)$$

$$= X^\circ(--\{i\in u \mid [\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]\in\mathfrak{F}\}\cap u)$$

$$= X^\circ(\{i\in u \mid P_i \Vdash^{*\mathfrak{F}} \varphi([a_1],\cdots,[a_n])\})$$

ii) $\varphi=\psi\vee\chi,\ \psi\wedge\chi,\ \neg\psi,\ \exists x\psi$ のときはかんたん

([1]の prime stalk Theorem と同様)

Th 3 $(Pr(I), P^\circ)$: locally invariant, $\mathfrak{F}$: P-ultrafilter

$F^\circ\in X^\circ(u)$: max-filter, $P^\circ_{F^\circ}$ で Maximum Principle が

成り立つとする.

$$P^\circ_{F^\circ}/\mathfrak{F}\models\varphi([a_1]_{\mathfrak{F}},\cdots,[a_n]_{\mathfrak{F}}) \iff P^\circ_{F^\circ}\Vdash^{*\mathfrak{F}}\varphi([a_1],\cdots,[a_n])$$

i) φ: atomic のとき

$$P^\circ_{F^\circ}/\mathfrak{F}\models\varphi([a_1]_{\mathfrak{F}},\cdots,[a_n]_{\mathfrak{F}}) \iff [\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]\in\mathfrak{F}$$

$$\iff \exists v\in F^\circ\ [\![\varphi(P^u_v(a_1),\cdots,P^u_v(a_n))]\!]\in\mathfrak{F}$$

$$\Leftrightarrow \exists v \in F^0\ \forall i \in v\ [\![\varphi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow \exists v \in F^0\ \ v = \{i \in v \mid [\![\varphi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathcal{F}\}$$

$$\Leftrightarrow \{i \in u \mid [\![\varphi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathcal{F}\} \in F^0$$

$$\Leftrightarrow \cdots \{i \in u \mid [\![\varphi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathcal{F}\} \wedge u \in F^0$$

$$\Leftrightarrow \{i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])\} \in F^0$$

$$\Leftrightarrow P^0_{F^0} \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])$$

ii) $\varphi = \psi \vee \chi$ のとき

$$P^0_{F^0}/\mathcal{F} \models \varphi([a_1]_{\mathcal{F}}, \cdots, [a_n]_{\mathcal{F}}) \Leftrightarrow [\![\varphi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow [\![\psi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathcal{F} \text{ or } [\![\chi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow P^0_{F^0} \Vdash^{*\mathcal{F}} \psi(\cdots) \text{ or } P^0_{F^0} \Vdash^{*\mathcal{F}} \chi(\cdots)$$

$$\Leftrightarrow \{i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathcal{F}} \psi(\cdots) \vee \chi(\cdots)\} \in F^0$$

$$\Leftrightarrow P^0_{F^0} \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])$$

iii) $\varphi = \psi \wedge \chi$ のとき

$\psi \vee \chi$ のときと同様

iv) $\varphi = \neg \psi$ のとき

$$[\![\varphi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathcal{F} \Leftrightarrow [\![\psi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \notin \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow \text{not } P^0_{F^0} \Vdash^{*\mathcal{F}} \psi(\cdots)$$

$$\Leftrightarrow \{i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathcal{F}} \psi(\cdots)\} \notin F^0$$

$$\Leftrightarrow \{i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathcal{F}} \neg\psi(\cdots)\} \in F^0$$

$$\Leftrightarrow P^0_{F^0} \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])$$

v) $\varphi = \exists x \psi$ のとき

$$[\![\exists x \psi(x, [a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow \exists v \exists a_0 \in P(v) [\![\psi([a_0], [a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathfrak{F}$$

$$\Leftrightarrow \exists v \exists a_0 \in P(v) \exists v' [\![\psi(P^u_{v'}(a_0), P^u_{v'}(a_1), \cdots)]\!] \in \mathfrak{F}$$

$$\Leftrightarrow \exists v \exists a \in P(v) [\![\psi(a, P^u_v(a_1), \cdots, P^u_v(a_n))]\!] \in \mathfrak{F}$$

$$\Leftrightarrow \exists v \exists a \in P(v)\ P^c_{F^c} \Vdash^{*\mathfrak{F}} \psi(a, \cdots)$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \bigcup_{v \subset u} \bigcup_{a \in P(v)} \{ i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathfrak{F}} \psi(a, \cdots) \} \in F^c$$

$$\Leftrightarrow . \{ i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathfrak{F}} \exists x \psi(x, \cdots) \} \in F^c$$

$$\Leftrightarrow P^c_{F^c} \Vdash^{*\mathfrak{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])$$

((*) は [1] 参照)

Def $\mathrm{UH}(I) \triangleq \{ F \mid F :$ ultrafilter of $\mathrm{Reg}(I) \}$ (但し $\mathrm{Reg}(I)$ は regular open set 全体)

$\mathrm{UH}(I)$ に $X^*(u) \triangleq \{ F \in \mathrm{UH}(I) \mid F \ni u \}$ (但し $u \in \mathrm{Reg}(I)$) を

base にして位相を入れる.

(I, P) : sheaf of B-st. のとき

presheaf of B-st $(\mathrm{UH}(I), P^*)$ を次の様に定義する

$$P^*(X^*(u)) \triangleq \varinjlim_{v \subset_d u} P(v)$$ (但し $\subset_d$ は dense subset のこと)

$P^{*\,X^*(u)}_{\ X^*(u')}$ の定義は [1] 参照

for $b_1, \cdots, b_n \in P^*(X^*(u))$

$$[\![R(b_1, \cdots, b_n)]\!] \triangleq \bigvee_{v \subset_d u} \bigvee_{\substack{c_1, \cdots, c_n \in P(v) \\ P^{*u}(c_k) = b_k}} [\![R(c_1, \cdots, c_n)]\!]$$

for X : open in $\mathrm{UH}(I)$ $\quad P^*(X) \triangleq \varprojlim_{\substack{X' \in B \\ X' \subset X}} P^*(X')$

但し B は basis

for $b_1, \cdots, b_n \in p^*(X)$

$$[\![R(b_1, \cdots, b_n)]\!] \leq \bigwedge_{\substack{X' \in B \\ X' \subset X}} [\![R(p^{*X}_{X'}(b_1), \cdots, p^{*X}_{X'}(b_n))]\!]$$

Remark $(\mho H(I), p^*)$は一般に sheaf of B-st. にはならないが sheaf of sets ではある。([1], 参照)

prop 5 $\theta(I)$の max-filter と $Reg(I)$の ultrafilter は1-1対応する。

∵) $F \in \mho H(I)$に対し $F° = \{u \in \theta(I) \mid --u \in F\}$ を

F: max に対し $F^* = \{--u \in Reg(I) \mid u \in F\}$ を

対応させればよい。1-1対応は明らか

Prop 6 (I, P): sheaf of B-st.

$F \in \mho H(I)$, $F°$: Fに対応する max-filter とする

$P_{F°} \cong P^*_F$

∵) 集合としての同型は[1]参照

同型写像を Θ とする。

$b_1, \cdots, b_n \in P_{F°}$ に対し

$$[\![R(b_1, \cdots, b_n)]\!]_{P_{F°}} = \bigvee_{X \ni F°} \bigvee_{\substack{c_1, \cdots, c_n \in P^*(X) \\ p^{*X}(c_k) = b_k}} [\![R(c_1, \cdots, c_n)]\!]_{P^*(X)}$$

$$= \bigvee_{u \in F°} \bigvee_{\substack{c_1, \cdots, c_n \in P(u) \\ p^{*X(u)}(c_k) = b_k}} [\![R(c_1, \cdots, c_n)]\!]_{P(u)}$$

$$= \bigvee_{--u \in F} \bigvee_{v \subset --u} \bigvee_{\substack{c_1, \cdots, c_n \in P(v) \\ p^{*X(v)}(c_k) = b_k}} [\![R(c_1, \cdots, c_n)]\!]_{P(v)}$$

$$= \bigvee_{\cdots u \in F} \bigvee_{v \subset a \cdots u} \bigvee_{\substack{c_1, \cdots, c_n \in P(v) \\ \Theta(p^{X(u)}(c_k)) = \Theta(b_k)}} [\![R(c_1, \cdots, c_n)]\!]_{P(v)}$$

$$= \bigvee_{\cdots u \in F} \bigvee_{v \subset a \cdots u} \bigvee_{\substack{c_1, \cdots, c_n \in P(v) \\ p^* X^*(\cdots u)(p'^{v}(c_k)) = \Theta(b_k)}} [\![R(c_1, \cdots, c_n)]\!]_{P(v)}$$

(但し $p'^{v} : P(v) \longrightarrow \varinjlim_{v \subset a \cdots u} P(v)$)

$$= \bigvee_{\cdots u \in F} \bigvee_{\substack{d_1, \cdots, d_n \in p^*(X^*(\cdots u)) \\ p^* X^*(\cdots u)(d_k) = \Theta(b_k)}} [\![R(d_1, \cdots, d_n)]\!]_{p^*(X^*(\cdots u))}$$

$$= [\![R(\Theta(b_1), \cdots, \Theta(b_n))]\!]_{P^*_F}$$

Th4 $(\Pr(I), P^\circ)$: locally invariant. $\mathfrak{F}$: P-ultrafilter

$F^\circ \in X(u)$: max-filter, $P^\circ_{F^\circ}$ で maximum principle が成り立つとする. F を F° に対応する ultrafilter とする.

$P^*_F/\mathfrak{F} \models \varphi([a_1]_{\mathfrak{F}}, \cdots, [a_n]_{\mathfrak{F}}) \Longleftrightarrow \cdots \{ i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathfrak{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n]) \} \in F$

∵) Th3 と prop 6 より明らか

Cor (Ultrastalk Theorem) [Ellerman]

(I, P): sheaf of st. $F \in Ult(I)$, F°: F に対応する max-filter とする

$P^*_F \models \varphi([a_1], \cdots, [a_n])$ iff $\{ i \in u \mid P_i \Vdash^* \varphi([a_1], \cdots, [a_n]) \} \in F$

∵) $\mathcal{B} = \mathbf{2}$ とすればより. Th4 の仮定をみたすことは明らか

($\Vdash^*$ は $\Vdash^{*\{1\}}$ と同値. $\mathcal{B} = \mathbf{2}$ のとき $\mathfrak{F} = \{1\}$ である)

参考文献

[1] D. P. Ellerman   Sheaves of Structure and Generalized ultraproduct
Ann. Math. Logic 7 (1974) 163~195

[2] F. W. Lawvere   Quntifiers and sheaves
Actes, Congrès intern. math. 1970, Tome 1, 329~334

[3] H. Volger   Ultrafilters, ultrapowers and finiteness in a topos
J. Pure Appl. Algebra 6 (1975) 345~356